2º Teste (pares) Ensaio de hipóteses 30/10/2020

Questão aberta:

1. Um comerciante recebe ovos de um determinado aviário, onde os ovos são classificados consoante o peso, em duas classes M e L. O peso dos ovos de classe M tem distribuição $N(50,8)$ e o peso dos ovos de classe L tem distribuição $N(55,8)$. Um comerciante recebe uma remessa de ovos com garantia de serem de classe L e tem um prazo de três dias para reclamar, caso considere ter havido engano da parte do aviário. Para tomar uma decisão ele analisou 10 ovos cujo peso total foi de 525 gramas.

   a. Com base num teste adequado ao nível de 2%, que atitude aconselharia o comerciante a tomar? [20 pontos]

      $X_i - peso\ dos\ ovos\ da\ classe\ i \sim N(\mu_i, 8)$

      $$H_0: \mu = 55 \quad contra \quad H_1: \mu = 50 \quad \alpha = 0.02$$

      Estatística teste: $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

      $$W = \{\bar{x}: \bar{x} < k\} \quad com\ k: P(\bar{X} < k|H_0) = 0.02 \Rightarrow k = 53.1631$$

      $$k = invnorm\left(0.02, 55, \sqrt{\frac{8}{10}}\right) = 53.1631$$

      Como $\bar{x} = \frac{525}{10} = 52.5 \in W$, rejeita-se H_0 pelo que há razão para reclamar (5)

      Ou

      $$W = \{z: z < k\} \quad com\ k: P(Z < k|H_0) = 0.02 \Rightarrow k = -2.0.537$$

      $$k = invnorm(0.02, 0,1) = -2.0537$$

      Como $z = -2.7951 \in W$, rejeita-se H_0 pelo há razão para reclamar

      Ou

      valor-p= $P(\bar{X} < 52.5|\mu = 55) = 0.0026 < 0.02$

      $= P(Z < -2.7951) = 0.0026 < 0.02$

b. Se pretender reduzir o erro de 2ª espécie em 20%, qual a dimensão da amostra a considerar? [10 pontos].

$$1-\beta = P(não\ rejeitar\ H_0|H_0 falsa) = P\left(\bar{X} \in W|H_1\right)$$

$$= P\left(\bar{X} > 53.1631|\mu = 50\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{53.1631-50}{\sqrt{8/10}}\right)$$

$$= P(Z > 3.5365) = 1 - P(Z \leq 3.5365) = 1 - 0.9998 = 0.0002$$

$$n = ?: 1-\beta = 0.0002 * 0.8 = 0.00016 \Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \underbrace{\frac{53.1631-50}{\sqrt{8/n}}}_{z_{0.0016}}\right) = 0.00016$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \underbrace{\frac{53.1631-50}{\sqrt{8/n}}}_{z_{0.99984}}\right) = 1 - 0.00016 = 0.99984$$

$$\Rightarrow z_{0.99984} = invnorm(0.99984, 0,1) = 3.5985 \Rightarrow n > 11$$

2. Considere uma população de Bernoulli da qual se selecionou uma amostra casual com 10 observações. Para testar $H_0: \theta = 0.2\ contra\ H_1: \theta = 0.4$ construiram-se os seguintes testes alternativos:

   i) Rejeitar H_0 quando $\bar{x} > 0.3$ e *ii)* Rejeitar H_0 quando $\bar{x} > 0.5$

   Determine a dimensão e a probabilidade de erro de 2ª espécie associadas a cada ensaio. Qual o teste que considera mais adequado? Justifique. [20 pontos]

$$\alpha_{i)} = P(\bar{X} > 0.3|\theta = 0.2) = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 3|\theta = 0.2\right)$$

$$= 1 - bincdf(3,10,0.2) = 1 - 0.8791 = 0.1209$$

$$\alpha_{ii)} = P(\bar{X} > 0.5|\theta = 0.2) = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 5|\theta = 0.2\right)$$

$$= 1 - bincdf(5,10,0.2) = 1 - 0.9936 = 0.0064$$

$$1 - \beta_{i)} = P(\bar{X} \leq 0.3|\theta = 0.4) = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 3|\theta = 0.4\right) = 0.3823$$

$$= bincdf(3,10,0.4) = 0.3823$$

$$1 - \beta_{ii)} = P(\bar{X} \leq 0.5 | \theta = 0.4) = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 5 | \theta = 0.4\right)$$

$$= bincdf(5,10,0.4) = 0.8338$$

O teste mais adequado é o $i)$ pois é aquele para o qual se obtem a menor dimensão do ensaio, i.é, o menor valor para a probabilidade de erro tipo 1 que é o mais importante porque é o que conseguimos controlar